UNIVERSIDAD NACIONAL DE INGENIERIA **P.A. 2008-1**
FACULTAD DE INGENIERIA MECANICA **26/07/2008**
DACIBAHCC

CUARTA CALIFICADA DE CALCULO NUMERICO (MB535)

- **DURACION: 60 MINUTOS**
- **SOLO SE PERMITE EL USO DE UNA HOJA DE FORMULARIO**
- **ESCRIBA CLARAMENTE SUS PROCEDIMIENTOS**
- **RESUELVA SOLAMENTE TRES PROBLEMAS**

Problema 1

Calcule $\int_1^2 \frac{dx}{sen(x)+2}$ y el máximo error, usando la siguiente fórmula de integración de Newton-Cotes Abierta

$$\int_{x_0}^{x_3} f(x)dx = \frac{3h}{2}\left(f(x_1)+f(x_2)\right)+\frac{3h^3}{4}f''(\varepsilon) \quad donde\ x_0 < \varepsilon < x_3,$$

con un paso de 1/3.

Solución

Aplicando la formula correspondiente I=0.3352

La segunda derivada es:

$$\overline{\overline{f(x)}} := \frac{2\cdot\cos(x)^2}{(\sin(x)+2)^3} + \frac{\sin(x)}{(\sin(x)+2)^2}$$

El máximo valor de f’’(x) en [1,2] es 0.13

Error máximo = $\frac{3h^3}{4}f''(\varepsilon)$=0.0036

Problema 2

Supóngase la fórmula

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx b_0 f(-c) + b_1 f(c)$$

a) Determine b_0, b_1 y c exigiendo que la ecuación aproximada anterior sea exacta para los casos en que $f(x)=1,\quad f(x)=x,\quad f(x)=x^2, f(x)=x^3$.
Obs: Grado de precisión = 3

b) Sea p el grado de precisión encontrado en a). Sabiendo que el error de la fórmula de cuadratura obtenida es del tipo

$$R(f) = Mf^{(p+1)}(\varepsilon),\ \varepsilon \in [-1,1]$$

Determinar el valor de M.

Solución

a) Condiciones de exactitud:

$$f(x)=1, \quad \int_{-1}^{1} 1dx = b_0 + b_1 \Rightarrow b_0 + b_1 = 2,$$

$$f(x)=x, \quad \int_{-1}^{1} xdx = -cb_0 + cb_1 \Rightarrow -b_0 + b_1 = 0$$

$$f(x)=x^2, \quad \int_{-1}^{1} x^2dx = b_0c^2 + b_1c^2 \Rightarrow 2c^2 = 2/3 \Rightarrow c = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$f(x)=x^3, \quad \int_{-1}^{1} x^3dx = -b_0c^3 + b_1c^3 \Rightarrow 0 = 0 \quad \forall c$$

b)

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f(-\frac{\sqrt{3}}{3}) + f(\frac{\sqrt{3}}{3}) + Mf^{(4)}(\varepsilon), \quad \varepsilon \in [-1,1]$$

$$f(x)=x^4: \quad \int_{-1}^{1} x^4dx = (-\frac{\sqrt{3}}{3})^4 + (\frac{\sqrt{3}}{3})^4 + M4! \Rightarrow M = \frac{1}{135}$$

Problema 3

Considere el problema EDO: $y(t) + t - \sin^{-1}(\dot{y}(t)) = 0$, si se conoce que cuando t=0 $\Rightarrow y = 0$.
Se pide:

a) Coloque la EDO en su forma estándar el PVI.
b) Demuestre que la solución es única y existe (T. Lipschitz). Considere el dominio $D = \{(t,y) \in \Re^2 : t \in [0 \ \ 1], -\infty < y < \infty\}$
c) Aplique un solo paso del método de Taylor de Orden 2 y encuentre en forma aproximada y(0.1).
d) Determine el máximo error cometido del ítem (c).

Solución

a)

$$\begin{cases} y'(t) = sin(t+y), & 0 \le t \le 1 \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

b)

$$\exists L > 0 : \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| \le L,$$

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right| = |\cos(t+y)| \le 1,$$

$$w_{i+1} = w_i + hT^{(2)}(t_i, w_i).$$

$$T^{(2)}(t_i, w_i) = f(t_i, w_i) + \frac{h}{2} f'(t_i, w_i).$$

$$f'(t, y) = \frac{df}{dt}(t, y) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} y'(t).$$

$$\begin{aligned} f'(t,y) &= \underbrace{\cos(t+y)}_{\frac{\partial f}{\partial t}} + \underbrace{\cos(t+y)}_{\frac{\partial f}{\partial y}} \underbrace{\sin(t+y)}_{y'(t)} \\ &= \cos(t+y)(1+\sin(t+y)). \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} w_1 &= w_0 + hT^{(2)}(t_0, w_0) \\ &= w_0 + 0.1\left(f(0,0) + \frac{0.1}{2} f'(0,0)\right) \\ &= 0 + 0.1\left(0 + \frac{0.1}{2}\right) \\ &= 0.005 \end{aligned}$$

d)

$$\begin{aligned} |f''(\xi_1, y(\xi_1))| &= \left|\left(-\sin(\xi_1 + y(\xi_1))(1 + \cos(\xi_1 + y(\xi_1))) + \cos^2(\xi_1 + y(\xi_1))\right)\right| \\ &\quad |(1 + \sin(\xi_1 + y(\xi_1)))| \\ &\leq 6, \end{aligned}$$

$$|\tau_1| \leq \frac{0.1^2 6}{3!} = 0.01.$$

Problema 4

Un sistema dinámico obedece a la siguiente ecuación diferencial ordinaria:

$$\ddot{\theta} - \frac{g}{l}\theta = 0$$

$$\theta(0) = 0\ rad$$

$$\dot{\theta}(0) = 0.25\ rad/seg$$

si $g = 9.81\ m/seg^2$, y $l = 0.5\ m.$; estime $\theta(0.15)$, usando el método de Euler (h=0.05)

Solución

$$\dot{\theta} = z$$

$$\dot{z} = \frac{g}{l}\theta$$

$$t_0 = 0$$

$$\theta_0 = 0$$

$$z_0 = 0.25$$

$$t_{n+1} = t_n + h$$

$$\theta_{n+1} = \theta_n + h\, z_n$$

$$z_{n+1} = z_n + h\frac{g}{l}\theta_n$$

Tabulando:

n	t_n	θ_n	z_n
0	0	0	0.25
1	0.0500	0.0125	0.2500
2	0.1000	0.0250	0.2623
3	0.1500	0.0381	0.2868

Los profesores